Відповіді на завдання
І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
18 жовтня 2025 р.

8 клас

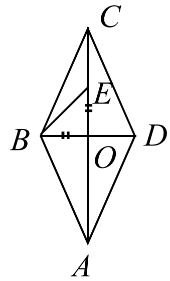
```
 ***27      ***27      ***27
    *8         *8         98
****16     ****16     ****16
*****      ****3      ***43
****46     ****46     ****46
```

1. Таким чином при множені множеного на 8 у добутку отримуємо більше цифр, ніж при множенні на 9, що неможливо.

2. Нехай у гіпнотизера x курей та y індиків. Індиками себе вважають $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}$ або $\frac{1}{5}(x+y)$ птахів. Звідси $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{1}{5}(x+y)$, $x+9y=2(x+y), 8y=x+y$, $y=\frac{1}{8}(x+y)$, тобто індиком є кожен восьмий птах.

3. Найменше значення виразу 2025. Подамо вираз $x^2+5y^2+5z^2-4xz+4yz-88y+3961$ у вигляді $x^2-4xz+4z^2+4y^2+4yz+z^2+y^2-88y+1936+2025$, тоді $x^2+5y^2+5z^2-4xz+4yz-88y+3961=(x-2z)^2+(2y+z)^2+(y-44)^2+2025\geq 2025$.

4. *Аналіз.* Від точки O відкладемо відрізок $OE=OB$, тоді $\angle BEO=45°$, а відрізок AE дорівнює півсумі діагоналей. Задача звелась до побудови трикутника за стороною (половина заданої суми діагоналей) і двома прилеглими до неї кутами (45° і заданим).

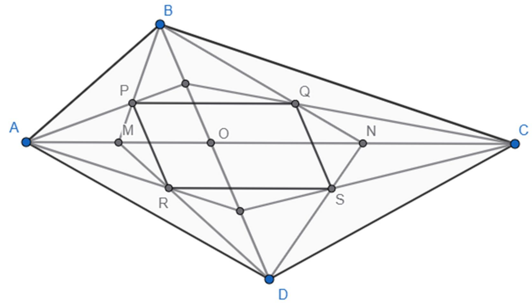


Побудова. Ділимо задану суму діагоналей навпіл і на отриманому відрізку *AE* будуємо трикутник *ABE* за стороною *AE* і двома прилеглими до неї кутами (заданим і кутом 45°, який можна отримати як кут довільного рівнобедреного прямокутного трикутника). З точки *B* опускаємо перпендикуляр *BO* на відрізок *AE* і на продовжені перпендикуляра ставимо точку *D*, таку що *OD*=*OB*. На продовженні *AE* ставимо точку *C*, таку що *AO*=*OC*. Ромб *ABCD* – шуканий.

9 клас

1. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

2. Оскільки діагоналі розбивають чотирикутник *ABCD* на чотири трикутники, то *ABCD* – опуклий. Нехай *M* і *N* – відповідно середини *AO* і *OC*, а *P* і *Q* – точки перетинів медіан трикутників ΔAOB і ΔBOC відповідно. Оскільки $\frac{BP}{PM} = \frac{BQ}{QN} = 2$, то ΔPBQ і ΔMBN подібні, $BP = \frac{2}{3}BM$, а отже, $PQ = \frac{2}{3}MN$ і $\angle BPQ = \angle BMN$, тобто $PQ \parallel MN$. Аналогічно доводимо, що $RS = \frac{2}{3}MN$ і $RS \parallel MN$. А оскільки PQ і RS паралельні і рівні, то *PQRS* – паралелограм.



3. Не вдасться. При таких перетвореннях парність суми чисел у всіх вершинах куба не зміниться. Але 2+0+2+5+2+0+2+6=19 – непарне число, а $8n$ – парне для будь-якого цілого числа n.

4. Якщо в рівність $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{1}{pa+qb}$ підставити $q = 1-p$, вона стає еквівалентна рівності

$p(1-p)(a-b)^2 = 0$. Дійсно, $\frac{pb+(1-p)a}{ab} = \frac{1}{pa+(1-p)b}$,

$(pb+(1-p)a)(pa+(1-p)b) - ab = 0$,

$p^2ab + p(1-p)a^2 + p(1-p)b^2 + (1-p)^2ab - ab = 0$,

$p(1-p)(a^2+b^2) + ab(p^2+(1-p)^2-1) = 0$,

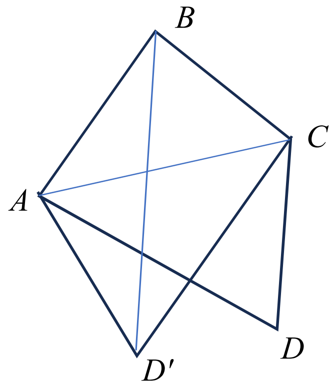
$p(1-p)(a^2+b^2) - 2abp(1-p) = 0$.

$p(1-p)(a-b)^2 = 0$.

Але за умовою $p \neq 0$ і $1-p \neq 0$, тому $a = b$.

10 клас

1. Брату 32, а сестрі 24 роки. Нехай вік брата – x, а сестри – y років. Тоді $\begin{cases} 0{,}625x - 0{,}75y = 2 \\ 0{,}5x - 0{,}375y = 7 \end{cases}$, звідки $x = 32, y = 24$.



2. Нехай $ABCD$ заданий опуклий чотирикутник і $AB = a, BC = b$, $CD = c, DA = d$. Побудуємо $\Delta ACD'$, такий що $AD' = c, CD' = d$. Тоді $\Delta ACD' = \Delta ACD$ і площа $ABCD'$ також дорівнює S Але $S = = S_{ABD'} + S_{BCD'} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{D'AB} + \frac{1}{2}bd\sin\widehat{D'CB} \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$.
3. Помножимо чисельник і знаменник кожного з доданків на відповідну різницю коренів, тоді $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \cdots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025} = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \cdots - \sqrt{2024} + +\sqrt{2025} = -1 + 45 = 44$.
4. Оскільки x^3 задовольняє рівність $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$, то шукаємо многочлен у вигляді $f(x) = x^3 + g(x)$. Але тоді $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Далі, при $x = y = 0$, $g(0) = 2g(0)$ і тому $g(0) = 0$, тому $g(x)$ шукаємо у вигляді $g(x) = xp(x)$, тоді при $y = x$ $2xp(2x) = 2xp(x)$, звідки $p(x) = p(2x) = p(4x) = p(8x) = \cdots$, що можливо лише для многочлена, що є тотожною сталою ($p(x) = a$), тому $f(x) = x^3 + ax$.

11 клас

1. $\cos 2025x + \cos 2017x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$, $2\cos 2021x \cos 4x = \cos 4x$, $\cos 4x\,(2\cos 2021x - -1) = 0$. Тоді $\cos 4x = 0$ або $\cos 2021x = \frac{1}{2}$, звідки $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, x = \pm\frac{\pi}{6063} + \frac{2\pi k}{2021}, k \in \mathbb{Z}$**.**
2. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}\right) = = \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$. Таким чином $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ або $2\,\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = (BD^2 + AC^2) - (AB^2 + CD^2)$, А отже, ці вектори перпендикулярні тоді, і лише тоді, коли $BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2$, що й треба було довести.
3. Поділивши рівняння на праву частину отримаємо рівняння $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$, очевидним розв'язком якого є $x = 2$. Інших розв'язків рівняння не має, оскільки вирази $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$ і $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < 1$, і ліва частина рівняння є монотонно спадною функцією як сума двох монотонно спадних функцій.
4. Не існують. Нехай прогресія має вигляд $a, a+d, a+2d, a+3d$ $(d \geq 0)$. Оскільки вільні члени рівнянь від'ємні, то $d \neq 0, a < 0, a + d < 0, a + 2d > 0, a + 3d > 0$, тому члени прогресії різні і $p \neq q$ (якщо б $p = q$, то корені однакових рівнянь були б попарно однакові). Нехай $p < q$. Тоді $a + a + 2d = p$, $a + d + a + 3d = q$ і $a(a + 2d) = (a + d)(a + 3d) = -1$. Звідси $a = -\frac{3d}{2}$, $d = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $a = -\sqrt{3}$. Але $p = 2a + 2d = -2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}} \notin Z$— суперечність

.