

**Завдання I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
18 жовтня 2025 р.**

8 клас

1. (2 бали) Замінити зірочки цифрами або довести, що це неможливо.

$$\begin{array}{r} \times \quad \text{***}27 \\ \quad \quad \text{**} \\ \hline \text{****}6 \\ \text{****} \\ \hline \text{****}46 \end{array}$$

2. (3 бали) Сільський гіпнотизер Петро Михайлович розводить курей та індиків. У результаті його експериментів кожний десятий індик вважає себе куркою, а кожна десята курка – індіком. Кожен п'ятий птах Петра Михайловича вважає себе індіком. Яка насправді частка індиків у його господарстві.
3. (3 бали) Знайти найменше значення виразу
 $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xz + 4yz - 88y + 3961$.
4. (4 бали) Побудувати ромб за кутом між стороною і більшою діагоналлю та сумою довжин його діагоналей.

**Завдання I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
18 жовтня 2025 р.**

9 клас

1. (2 бали) Розкласти на множники многочлен: $x^4 + x^2 + 1$.
2. (3 бали) Чотирикутник розбили діагоналями на 4 трикутники. Довести, що точки перетину їхніх медіан є вершинами паралелограма.
3. (3 бали) У вершинах $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ куба розміщені відповідно числа 2, 0, 2, 5, 2, 0, 2, 6. За одне перетворення до двох чисел, що знаходяться на одному ребрі додається по одиниці або віднімається по одиниці.
Чи вдасться за кілька перетворень зробити всі числа рівними між собою?
Відповідь обґрунтувати.
4. (4 бали) Задано відмінні від нуля числа a, b, p, q , такі що $p + q = 1$ і
$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{1}{pa + qb}.$$
Довести, що $a = b$.

**Завдання I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
18 жовтня 2025 р.**

10 клас

1. (2 бали) 62,5% віку брата на 2 роки більше, ніж 75% віку сестри, а 50% віку брата на 7 років більше, ніж 37,5% віку сестри. Скільки їм років?
2. (3 бали) Нехай a, b, c, d — послідовні сторони опуклого чотирикутника, а S — його площа. Довести, що $ac + bd \geq 2S$.
3. (3 бали) Знайти суму $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$.
4. (4 бали) Знайти всі многочлени $f(x)$, для яких $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy(x + y)$ для всіх дійсних x та y .

**Завдання I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
18 жовтня 2025 р.**

11 клас

1. (2 бали) Розв'яжіть рівняння $\cos 2025x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos 2017x$.
2. (3 бали) Довести, що в тетраедрі $ABCD$ ребра AD та BC взаємно перпендикулярні тоді і лише тоді, коли $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.
3. (3 бали) Знайти всі дійсні корені рівняння $(2 + \sqrt{3})^x + 1 = (2\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x$.
4. (4 бали) Чи існують цілі числа p і q , такі, що корені рівнянь $x^2 - px - 1 = 0$ та $x^2 - qx - 1 = 0$, записані у деякому порядку утворюють арифметичну прогресію? Відповідь обґрунтувати.